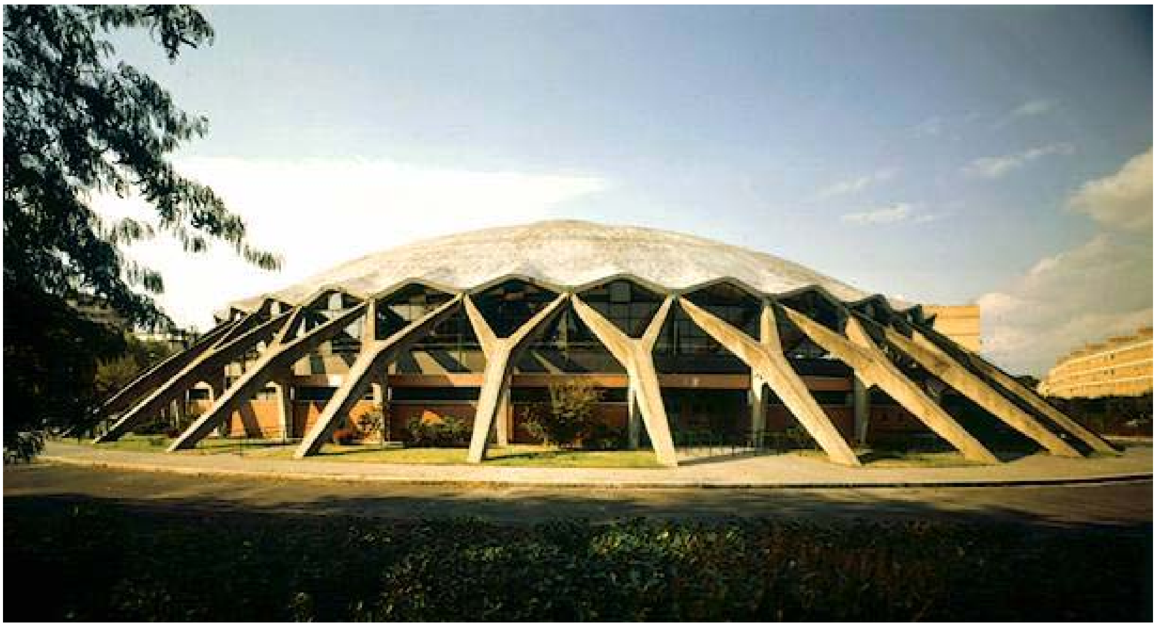
Il Palazzetto dello Sport di Nervi

[...] Nella fase più importante e decisiva per ogni realizzazione edilizia, ossia quella che porta attraverso la progettazione di massima a definire le caratteristiche dell'organismo architettonico anche nella sua sostanza strutturale e statica, i calcoli molto complicati non servono e debbono essere sostituiti da valutazioni approssimate fondate su semplici verifiche e soprattutto sulla sensibilità statica, che è la vera base della invenzione costruttiva. [...]

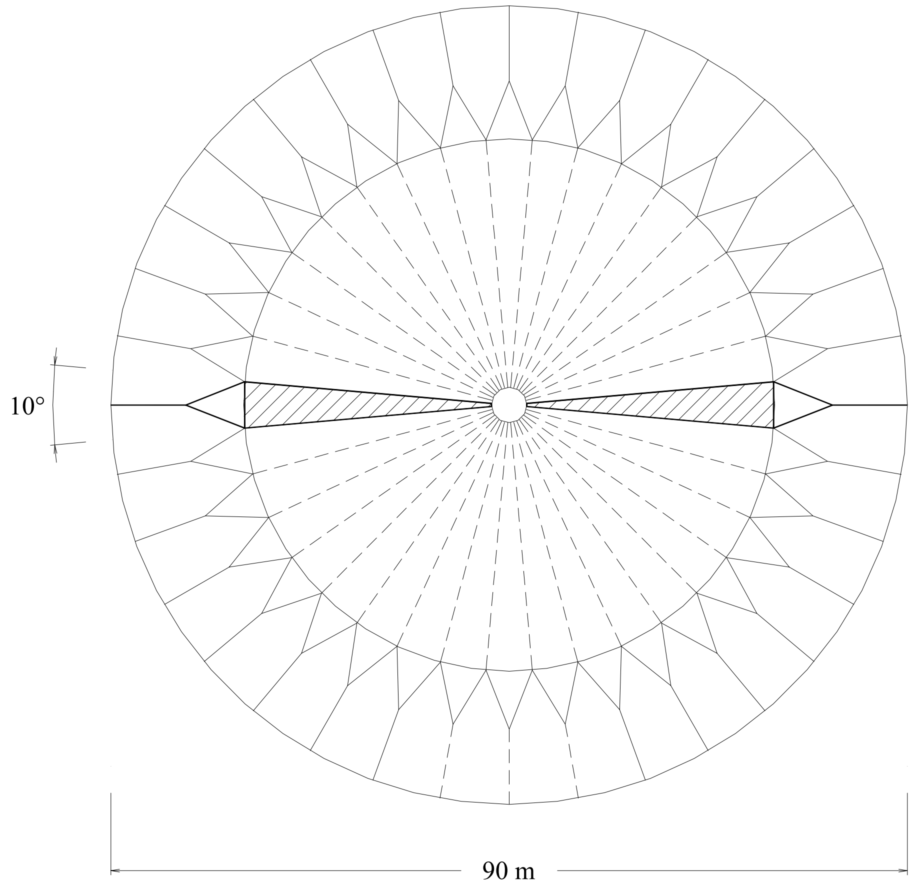


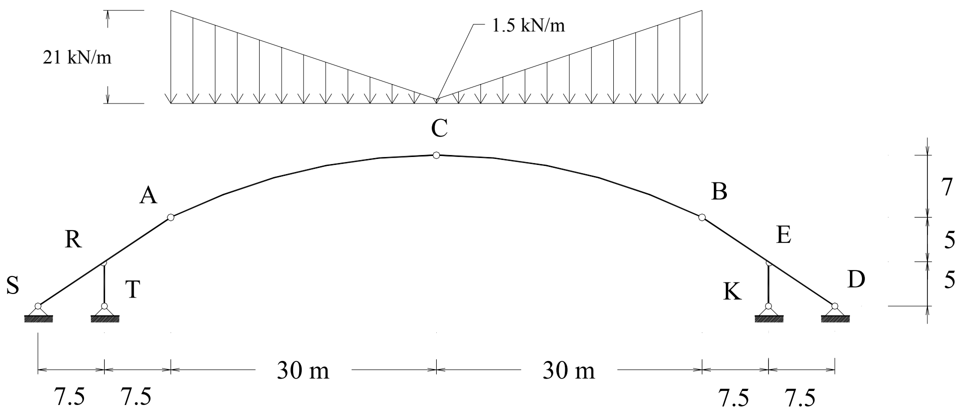
Pier Luigi Nervi
Palazzetto dello Sport - Roma (1958)

[...] In sostanza per il progettista è necessario e sufficiente disporre di procedimenti di calcolo che permettano di definire il comportamento di una struttura resistente entro limiti approssimativi abbastanza larghi (poco importa se la sezione resistente di un ponte prevista in fase di progettazione creativa di 1.00 m di spessore, risulterà a seguito di più approfondite indagini di 0.90 m o di 1.10 m), ma è assolutamente indispensabile la completa comprensione di tutto il mondo statico, la piena padronanza di metodi e formule semplificative, in una parola la capacità di affrontare un qualsiasi sistema iperstatico complesso, sviscerarne i modi di funzionamento, suddividerlo in sistemi elementari o riportarlo a schemi già risolti, e, con l'aiuto di calcoli e conteggi di rapida esecuzione, arrivare a determinazioni quantitative sufficienti a definire in via di massima le caratteristiche della soluzione costruttiva. [...]

Pier Luigi Nervi, *Arte o Scienza del Costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*, Città Studi, 1997, Torino

Le caratteristiche strutturali dell'impianto sono schematicamente illustrate nella figura: 36 cavalletti a Y disposti radialmente sorreggono una calotta sferica di piccolo spessore e ne convogliano al suolo le spinte. I cavalletti giacciono sulla stessa superficie definita dalla calotta e ne rappresentano per così dire la prosecuzione fino a terra. Il comportamento statico reale di un tale sistema strutturale è quello di una membrana di rivoluzione ed è caratterizzato da uno scambio di sforzi nelle due direzioni definite dai meridiani e dai paralleli della cupola, ovvero da un regime statico intrinsecamente spaziale.





Una misura approssimata ma sufficientemente attendibile delle forze che sollecitano i diversi elementi strutturali si può tuttavia ottenere anche sulla base di un modello drasticamente semplificato che trascuri in partenza la natura spaziale del funzionamento statico reale riconducendo il problema all'analisi di un sistema piano.

Detto *modello* semplificato si può definire *ad archi indipendenti*. Esso consiste infatti nell'immaginare la cupola come un insieme di archi a sezione variabile ciascuno dei quali costituito da una coppia di cavalletti contrapposti e dalle corrispondenti porzioni di calotta sferica (spicchi) comprese tra due piani verticali passanti per l'asse della cupola e tali da racchiudere la suddetta coppia di cavalletti.
L'organismo tridimensionale della cupola viene dunque ricondotto a una successione di sistemi piani indipendenti ciascuno dei quali si può studiare come sistema articolato di corpi rigidi: cavalletti e spicchi del generico sistema si possono modellare come travi a sezione variabile vincolate tra loro e con il suolo mediante cerniere e soggette alla frazione di carico totale direttamente gravante su di esse (vedi figura).
Sia la modellazione dei vincoli che la modellazione dei carichi meritano di essere precisate.
Che tutti i vincoli, sia esterni che interni, siano delle cerniere appare infatti giustificato dalla reale configurazione degli elementi strutturali solo in alcuni casi mentre in altri è motivato anche dalla necessità didattica di ottenere uno schema isostatico.
Sono sicuramente delle cerniere i vincoli che collegano i cavalletti alla calotta (A e B) e i due spicchi della calotta tra loro (C), poiché lo spessore ridotto della calotta e la forte rastremazione dei cavalletti impediscono la trasmissione del momento e consentono pertanto la rotazione relativa degli elementi vincolati.
Per lo stesso motivo mentre sembra ragionevole modellare come cerniere i vincoli al piede dei cavalletti (S e D) e dei pilastrini verticali (T e K) posti a metà dei cavalletti stessi, sarebbe più realistico ipotizzare un incastro in corrispondenza dell'innesto dei pilastrini sui cavalletti (R e E). Tuttavia, anche in questo caso, l'ipotesi di cerniera non sembra eccessivamente irrealistica in virtù della notevole differenza di sezione tra cavalletti e pilastrini che, anche in presenza di un incastro tra i due elementi, renderebbe comunque modesto il momento che sarebbe possibile trasmettere dall'uno all'altro.
Con questa schematizzazione dei vincoli la struttura che si ottiene è isostatica. Ciò si può riconoscere in diversi modi.
Innanzitutto, confrontando i gradi di libertà con i gradi di vincolo: 6 corpi rigidi nel piano sono dotati di 6x3 = 18 gradi di libertà e, connessi tra loro e con il suolo mediante 9 cerniere (con le cerniere interne che collegano sempre due soli corpi), ricevono 9x2 = 18 gradi di vincolo.
Il conteggio si può anche effettuare considerando i pilastrini TR e KE non come travi ma come vincoli elementari (pendoli) per le travi SRA e DEB: in questo caso si hanno 4 corpi (12 gradi di libertà) vincolati con 5 cerniere e due pendoli (10 + 2 gradi di vincolo).
In maniera sintetica si può osservare che la struttura è costituita dall'assemblaggio di tre archi a tre cerniere, due dei quali vincolati al suolo (SRT e DEK) e il terzo vincolato ai primi due (ACB): la struttura risultante è una *struttura composta* che essendo formata dall'unione di schemi isostatici è essa stessa isostatica.
Di tale particolarità si terrà conto nella scelta della procedura di soluzione del problema statico.
Per quanto riguarda il carico direttamente applicato alla struttura si è trascurato il peso proprio dei cavalletti e dei pilastrini mettendo in conto solo il peso proprio della calotta. Assumendo[1] per questo un valore di $4\ kN/m^2$, la differente larghezza degli spicchi all'innesto con i cavalletti e in corrispondenza dell'occhio della cupola genera sulle travi AC e CB un carico distribuito con legge trapezoidale e i cui valori massimo e minimo si ottengono moltiplicando il carico a metro quadro per le larghezze massima e minima dello spicchio. Poiché questo è individuato da un angolo di *10°* *(0.1745 rad)* tali larghezze[2], corrispondenti a circonferenze di raggi pari rispettivamente a *30 m* e *2 m*, sono date da $30 \cdot 0.1745 = 5.23\ m$ e $2 \cdot 0.1745 = 0.35\ m$. Conseguentemente per il carico trapezoidale risultano i seguenti valori estremi:

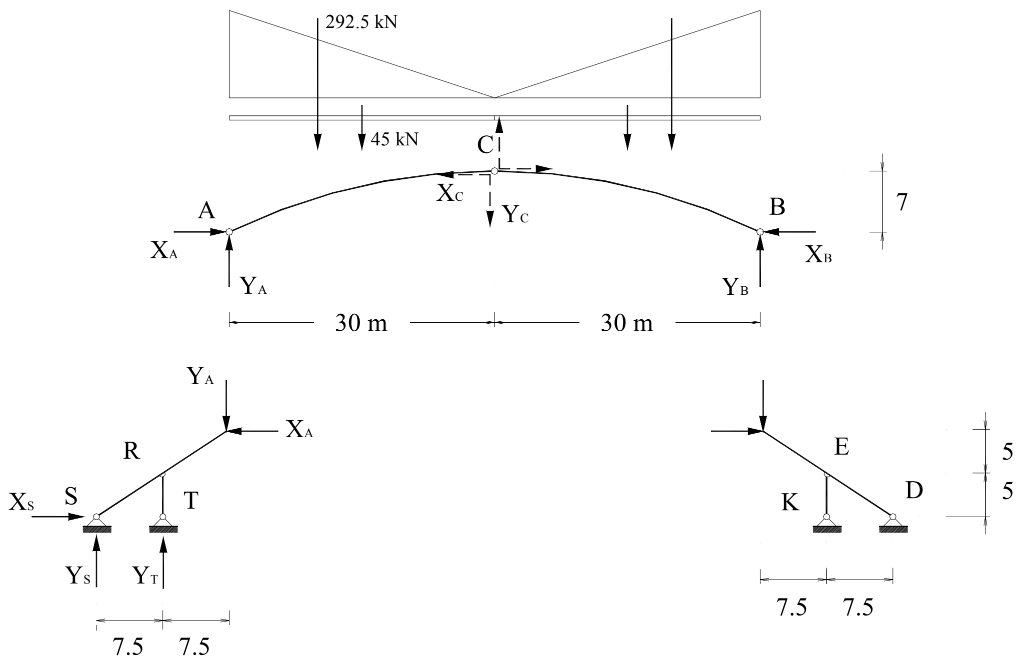
---

[1] Il peso per unità di superficie di un elemento strutturale bidimensionale di spessore (s) e peso specifico (γ) si ottiene dal prodotto $s \cdot \gamma$. Poiché il peso specifico del cemento armato è di $25\ kN/m^3$ un carico unitario di $4\ kN/m^2$ corrisponderebbe a una calotta di spessore $s = 4/25 = 0.16\ m$ (vedi nota 2).
[2] Si tenga presente che le dimensioni geometriche della struttura riportate nella figura sono solo verosimili ma non vere.

$$4 \cdot 5.23 = 20.9 \ \ kN/m \approx 21 \ \ kN/m$$

$$4 \cdot 0.35 = 1.4 \ \ kN/m \approx 1.5 \ \ kN/m$$

Poiché si è riconosciuto che la struttura è composta, la risoluzione del problema statico si può effettuare prendendo in esame successivamente la parte *portata* e la parte *portante*: si risolve cioè dapprima l'arco a tre cerniere ACB, considerandolo vincolato al suolo in A e in B, e successivamente i due archi a tre cerniere SRT e DEK applicando a questi, come forze esterne note, le reazioni vincolari delle cerniere A e B, agenti sull'arco ACB, cambiate di segno.
Gli archi a tre cerniere SRT e DEK, tuttavia, si possono più semplicemente considerare come travi semplicemente appoggiate in virtù del fatto che i pilastrini TR e KE, direttamente scarichi ovvero esenti da forze direttamente applicate, equivalgono per le travi SRA e DEB rispettivamente a due pendoli.
Gli schemi strutturali da risolvere sono illustrati nella figura seguente. Si osservi come il carico trapezoidale viene considerato come somma di un carico uniforme e di un carico triangolare i cui risultanti valgono rispettivamente *1.5·30 = 45 kN* e *(21-1.5)·30/2 = 292.5 kN.*



Risoluzione dell'arco a tre cerniere ACB con il metodo delle equazioni ausiliarie

$$\begin{cases} R_x = X_A - X_B = 0 \\ R_y = Y_A + Y_B - 292.5 \cdot 2 - 45 \cdot 2 = 0 \\ M_{AR} = Y_B \cdot 60 - 292.5 \cdot 10 - 45 \cdot 15 - 45 \cdot 45 - 292.5 \cdot 50 = 0 \\ M_{CR}^{(CB)} = Y_B \cdot 30 - X_B \cdot 7 - 45 \cdot 15 - 292.5 \cdot 20 = 0 \end{cases}$$

Le prime tre equazioni sono le equazioni di equilibrio globale ed impongono che il sistema di tutte le forze agenti sulla struttura, attive e reattive, sia equivalente a zero; la quarta è l'equazione ausiliaria che impone l'annullarsi del momento di tutte le forze agenti sul solo corpo CB rispetto alla cerniera interna.
Dalla terza equazione si ricava Y_B che sostituita nella seconda e nella quarta equazione consente di ottenere rispettivamente Y_A e X_B; sostituendo questa ultima nella prima equazione si ricava X_A.

$$\begin{cases} (3)\ \ X_A = 514.3\ \ kN \\ (2)\ \ Y_A = 337.5\ \ kN \\ (1)\ \ Y_B = 337.5\ \ kN \\ (2)\ \ X_B = 514.3\ \ kN \end{cases}$$

La risoluzione del sistema si completa determinando le reazioni nella cerniera interna C ciò che si effettua scrivendo le altre due equazioni di equilibrio per il solo corpo CB, ovvero quelle che impongono l'annullarsi del risultante di tutte le forze attive e reattive agenti su CB.
Sinteticamente si può osservare che, poiché la reazione Y_B equilibra l'intero carico agente sulla trave CB, la reazione Y_C non può che essere nulla e che, non essendo presenti forze direttamente applicate in direzione orizzontale, la reazione X_C deve essere uguale ed opposta alla X_B.

Risoluzione della trave semplicemente appoggiata SRA

$$\begin{cases} R_x = X_S - X_A = X_S - 514.3 = 0 \\ R_y = Y_S + Y_T - Y_A = Y_S + Y_T - 337.5 = 0 \\ M_{SR} = Y_T \cdot 7.5 + X_A \cdot 10 - Y_A \cdot 15 = Y_T \cdot 7.5 + 514.3 \cdot 10 - 337.5 \cdot 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\ \ X_S = 514.3\ \ kN \\ (2)\ \ Y_S = 326.8\ \ kN \\ (1)\ \ Y_T = 10.7\ \ kN \end{cases}$$

La spinta orizzontale viaggia inalterata fino alle cerniere di base S e D come pure il carico verticale che viene equilibrato dai pilastrini in misura praticamente inapprezzabile (meno del 4% del totale): ciò significa che le travi SRA e DEB si comportano di fatto come pendoli (o bielle) inclinati poiché le forze ad esse trasmesse dalle cerniere di estremità (S e A per la trave SRA; D e B per la trave DEB) sono dirette con ottima approssimazione lungo l'asse delle travi stesse.